روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ برای حل معادلات دیفراسیل مقدار اولیه یکی از بهترین الگوریتم های حل از نظر دقت و همگرایی می باشد. برنامه ی این الگوریتم نیز به گونه ای نوشته می شود که با دریافت معادله ی دیفرانسیل و استپ (step) های زمانی حل تابع را به صورت برداری و همچنین گراف نمایش میدهد.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n), \\
k_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{h}{2}k_1), \\
k_3 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{h}{2}k_2), \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3).
\end{aligned}
$$

برای حالت کلی روش رانگ-کوتا معادله زیر را داریم:

$$
\begin{cases}
y' = f(t, y) \\
y(t_0) = \alpha
\end{cases}
$$

برای هر مرحله h تعریف می شود:

$$t_i = t_0 + ih.$$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
k_1 &= hf(t_i,\, w_i) \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2},\, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2},\, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(t_i + h,\, w_i + k_3) \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

ARP PROJECT.IR

با حل تقریبی داریم:

$$w_i \approx y(t_i).$$

برای مثال معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} y' = y - t^2 + 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

مرحله صفر:

$$t_0 = 0, w_0 = 0.5.$$

مرحله ۱: t1=0.5

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_0, w_0) = 0.5f(0, 0.5) = 0.75 \\ k_2 &= hf(t_0 + h/2, w_0 + k_1/2) = 0.5f(0.25, 0.875) = 0.90625 \\ K_3 &= hf(t_0 + h/2, w_0 + k_2/2) = 0.5f(0.25, 0.953125) = 0.9453125 \\ K_4 &= hf(t_0 + h, w_0 + K_3) = 0.5f(0.5, 1.4453125) = 1.09765625 \\ w_1 &= w_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 1.425130208333333 \end{aligned}$$

مرحله ۲: t2=1

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_1, w_1) = 0.5f(0.5, 1.425130208333333) = 1.087565104166667 \\ k_2 &= hf(t_1 + h/2, w_1 + k_1/2) = 0.5f(0.75, 1.968912760416667) = 1.203206380208333 \\ K_3 &= hf(t_1 + h/2, w_1 + k_2/2) = 0.5f(0.75, 2.0267333984375) = 1.23211669921875 \\ K_4 &= hf(t_1 + h, w_1 + K_3) = 0.5f(1, 2.657246907552083) = 1.328623453776042 \\ w_2 &= w_1 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 2.639602661132812 \end{aligned}$$

مرحله۳: t3=1.5

MATLAB PROJECT.IR

$$k_1 = hf(t_2, w_2) = 0.5f(1, 2.639602661132812) = 1.319801330566406$$
$$k_2 = hf(t_2 + h/2, w_2 + k_1/2) = 0.5f(1.25, 3.299503326416016) = 1.368501663208008$$
$$K_3 = hf(t_2 + h/2, w_2 + k_2/2) = 0.5f(1.25, 3.323853492736816) = 1.380676746368408$$
$$K_4 = hf(t_2 + h, w_2 + K_3) = 0.5f(1.5, 4.020279407501221) = 1.385139703750610$$
$$w_3 = w_2 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 4.006818970044454$$

مرحله۴: t4=2

$$k_1 = hf(t_3, w_3) = 0.5f(1.5, 4.006818970044454) = 1.378409485022227$$
$$k_2 = hf(t_3 + h/2, w_3 + k_1/2) = 0.5f(1.75, 4.696023712555567) = 1.316761856277783$$
$$K_3 = hf(t_3 + h/2, w_3 + k_2/2) = 0.5f(1.75, 4.665199898183346) = 1.301349949091673$$
$$K_4 = hf(t_3 + h, w_3 + K_3) = 0.5f(2, 5.308168919136127) = 1.154084459568063$$
$$w_4 = w_3 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 5.301605229265987$$

کدهای متلب:

```
function rungekutta
h = 0.5;
t = 0;
w = 0.5;
fprintf('Step 0: t = %12.8f, w = %12.8f\n', t, w);
for i=1:4
k1 = h*f(t,w);
k2 = h*f(t+h/2, w+k1/2);
k3 = h*f(t+h/2, w+k2/2);
k4 = h*f(t+h, w+k3);
w = w + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
t = t + h;
fprintf('Step %d: t = %6.4f, w = %18.15f\n', i, t, w);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function v = f(t,y)
v = y-t^2+1;


function rk45
epsilon = 0.00001;
```

MATLABPROJ.IR

```
h = 0.2;
t = 0;
w = 0.5;
i = 0;
fprintf('Step %d: t = %6.4f, w = %18.15f\n', i, t, w);
while t<2
h = min(h, 2-t);
k1 = h*f(t,w);

k2 = h*f(t+h/4, w+k1/4);
k3 = h*f(t+3*h/8, w+3*k1/32+9*k2/32);
k4 = h*f(t+12*h/13, w+1932*k1/2197-7200*k2/2197+7296*k3/2197);
k5 = h*f(t+h, w+439*k1/216-8*k2+3680*k3/513-845*k4/4104);
k6 = h*f(t+h/2, w-8*k1/27+2*k2-3544*k3/2565+1859*k4/4104-11*k5/40);
w1 = w + 25*k1/216+1408*k3/2565+2197*k4/4104-k5/5;
w2 = w + 16*k1/135+6656*k3/12825+28561*k4/56430-9*k5/50+2*k6/55;
R = abs(w1-w2)/h;
delta = 0.84*(epsilon/R)^(1/4);
if R<=epsilon
t = t+h;
w = w1;
i = i+1;
fprintf('Step %d: t = %6.4f, w = %18.15f\n', i, t, w);
h = delta*h;
else
h = delta*h;
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function v = f(t,y)
v = y-t^2+1;
```

نتیجه خروجی به ازای h=2 بصورت زیر است:

```
Step 0: t = 0.0000, w = 0.500000000000000
Step 1: t = 0.2000, w = 0.829299076923077
Step 2: t = 0.4353, w = 1.287432405787216
Step 3: t = 0.6766, w = 1.827289794651997
Step 4: t = 0.9264, w = 2.448301479233138
Step 5: t = 1.1902, w = 3.153049280338359
Step 6: t = 1.4806, w = 3.955581050460808
Step 7: t = 1.8537, w = 4.952039512278185
Step 8: t = 2.0000, w = 5.305486816572746
```

MATLABPROJECT.IR